МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по ОД

__________ Е.В. Луков

«30» сентября 2022г.

ПРОГРАММА

кандидатского экзамена по научной специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Томск – 2022

Программа кандидатского экзамена по научной специальности ***1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ*** рассмотрена и рекомендована к утверждению ученым советом *механико-математического факультета*

протокол № 38 от 29.09.2022

Авторы-разработчики:

1. *Гулько Сергей Порфирьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой математического анализа и теории функций ММФ*
2. *Колесников Иван Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ*
3. *Копанев Сергей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ*
4. *Лазарев Вадим Ремирович, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ*
5. *Малютина Александра Николаевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ*
6. *Хмылева Татьяна Евгеньевна, к.ф.-м.н, доцент, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ*

Согласовано:

Руководитель ОП *Гулько Сергей Порфирьевич*

1. Общие положения

На основании постановления Правительства Российской Федерации от 23.09.2013 № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» кандидатские экзамены сдаются в соответствии с научной специальностью (научными специальностями) и отраслью науки, предусмотренными номенклатурой научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, утверждаемой Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (далее – Минобрнауки России), по которым осуществляется подготовка (подготовлена) диссертации.

Кандидатский экзамен по специальной дисциплине в соответствии с темой диссертации на соискание ученой степени кандидата наук представляет собой форму оценки степени подготовленности соискателя ученой степени к проведению научных исследований по научной специальности *1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»* по физико-математическим наукам (далее – кандидатский экзамен).

Программа кандидатского экзамена разработана на основе Паспорта научной специальности *1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ* (далее – Программа), утвержденного ВАК при Минобрнауки России https://drive.google.com/drive/folders/1RNYkXhvAzaEF85GqxOH8HhbenJIoUMR7 .

Организация и проведение приема кандидатского экзамена осуществляется в соответствии с установленным в НИ ТГУ порядком.

Подготовка по Программе может осуществляться как самостоятельно, так и в рамках освоения соответствующей программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре НИ ТГУ. Сдача аспирантом кандидатского экзамена является обязательным условием обучения и относится к оценке результатов освоения базовой дисциплины (модуля) образовательного компонента программы, осуществляемой в рамках промежуточной аттестации.

2. Структура кандидатского экзамена и шкала оценивания уровня знаний

Кандидатский экзамен проводится в форме устного экзамена по билетам продолжительностью один академический час и состоит из следующих частей:

1. Основные вопросы (не более трёх вопросов по содержанию курса «*Вещественный, комплексный и функциональный анализ*»).
2. Дополнительные вопросы (не более трёх вопросов из 2-го раздела содержания Программы).
3. Реферат

Оценка уровня знаний по каждому вопросу осуществляется по пятибалльной шкале со следующим принципом перерасчета:

«отлично» – 5 баллов;

«хорошо» – 4 балла;

«удовлетворительно» – 3 балла;

«неудовлетворительно» – 1-2 балла.

При оценивании ответов на каждый из вопросов экзаменационного билета учитываются следующие критерии:

Ответ на вопрос исчерпывающий, продемонстрировано понимание и знание сути вопроса в полном объеме. Замечаний нет.	5 баллов
Ответ на вопрос неполный, но раскрывающий основную суть вопроса, продемонстрировано понимание и знание вопроса в достаточном объеме. Замечания незначительные.	4 балла
Ответ неполный с существенными замечаниями, знания по вопросу фрагментарные и частичные, в том числе и по тематике диссертационного исследования.	3 балла
Ответ на вопрос отсутствует или дан неправильный	1-2 балла

Итоговая оценка за кандидатский экзамен выставляется решением экзаменационной комиссии:

«отлично» – при наличии не менее 80% 5-балльных ответов и отсутствии 3-2-1-балльных ответов;

«хорошо» – при наличии не менее 80% 4-балльных ответов и отсутствии 2-1-балльных ответов;

«удовлетворительно» – при наличии более 20% 3-балльных ответов и отсутствии 2-1-балльных ответов;

«неудовлетворительно» – при наличии 1-2 балльного ответа (или отказа отвечать на вопрос).

3. Перечень тем и вопросов для подготовки к сдаче экзамена

Раздел 1. Основные вопросы (по содержанию курса *«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»*).

Тема 1. *Действительный анализ*

1. Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения.

2. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина.

3. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла.

4. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

5. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией).

6. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной.

7. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса.

8. Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L_2 и равенство Парсеваля.

9. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

10. Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами.

11. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций.

12. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля.

13. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса.

14. Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии.

15. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

Тема 2. *Комплексный анализ*

1. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши.

2. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца.

3. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

4. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши.

5. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера).

6. Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами.

7. Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение.

8. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

9. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности.

10. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

11. Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии.

12. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция.

13. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара.

14. Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость.

15. Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

Тема 3. *Функциональный анализ*

1. Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность.

2. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.

3. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана.

4. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L_p.

5. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

6. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах.

7. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним.

8. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма.

9. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах.

10. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы.

11. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы.

12. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

13. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций.

14. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье.

15. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем.

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М., Наука, 1976.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973 .
4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, т. 1-2. М., Наука, 1967-1968.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., Наука, 1974.
6. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. II. М., Наука, 1975.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Москва: Юрайт, 2022.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. М., Мир, 1976.
9. Рудин У. Основы математического анализа. М., Мир, 1976.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. V. М., Физматгиз, 1959.
11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1. Спб: Лань, 2004.

Дополнительная литература

1. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998
2. Евграфов М.А. Аналитические функции. М., Наука, 1991
3. Зорич В.А. Математический анализ, т. II. М., Наука, 1984
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.М., Наука, 1965
5. Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975
6. Садовничий В.А. Теория операторов. М., Высш. Школа, 1999
7. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М., Мир, 1983.
8. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. М.: ИИЛ, 1962.

Раздел 2. Дополнительные вопросы

Область исследования: **Теория функциональных пространств: исследования классов функций, возникающих в математике и ее приложениях**

1. Сопряженное к пространству непрерывных функций в топологии поточечной сходимости.
2. Свойство Фреше-Урысона пространства непрерывных функций
3. Связи между числом Линделефа и теснотой данного тихоновского пространства и его пространства непрерывных функций.

Рекомендуемая литература:

1. А.В.Архангельский. Топологические пространства функций. – М. Изд-во МГУ. 1989 – 222с.

2. Е.С.Половинкин, М.В.Балашов. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2007.

3. M.Fabian, P.Habala, P.Hajek, V.M.Santalucia, J.Pelant and V.Zizler. Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry. – CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.

4. Albiac F., Kalton N. J. Topics in Banach space theory. – Springer Science & Business Media, 2006. – Т. 233.

Область исследования: **Функциональный анализ, отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы)**

1. Дополняемые пространства и проекторы.
2. Теоремы Алаоглу и Голдстайна.
3. Теорема Дугунджи.
4. Теорема Шмульяна.

Рекомендуемая литература:

1. Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and renormings in Banach spaces. – Pitman Monographs 64, Pitman, New York, 1993.

2. M.Fabian, Habala P., Hajek P., Santalucia V.M., Pelant J. Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry. – Springer-Verlag, New York, Berlin, 2001 – 452p.

3. Kadets M.I., Kadets V.M. Series in Banach Spaces. Conditional and Unconditional Convergence.- Birkhauser Verlag, 1997.-153 p.

4. Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1977.-190p.

Область исследования: **Теория векторных пространств, геометрия нормированных пространств, интегрирование и меры в функциональных пространствах, интегральные представления и преобразования**

1. Теорема о замкнутом графике.
2. Теорема Банаха об обратном операторе.
3. Теорема Банаха-Штейнгауза.
4. Теорема Хана-Жордана.

Рекомендуемая литература:

1. Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1977.-190p.
2. J.E.Jayne and C.A.Rogers. Selectors. – Princeton University Press. 2002.
3. Е.С.Половинкин, М.В.Балашов. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2007.
4. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, т.1, - М.: ИЛ, 1962.
5. Дэй М.М., Нормированные линейные пространства. – М.: ИЛ, 1961.

Область исследования: **Комплексный анализ, аналитические функции одного и многих комплексных переменных и их свойства, аналитическое продолжение, граничные свойства аналитических функций**

1. Теория простых концов Г.Д. Суворова.

2. Теорема о соответствии границ.

2. Теорема Каратеодори о сходимости последовательности областей к ядру.

3. Выделение ветвей многозначных функций.

4. Теорема о монодромии.

Рекомендуемая литература:

1. Суворов Г.Д. Простые концы и последовательности плоских отображений. Киев, Наукова думка. 1986.
2. Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. Томск: ТГУ. 2002г.
3. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций Т.2. Спб.: Лань. 2006.
4. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука. 1966.

Область исследования: **Различные классы и пространства аналитических функций, представления аналитических функций (ряды, непрерывные дроби, интегральные представления и т. п.)**

1. Компактность, связность класса *S*.

2. Интегральное представление класса *C*.

3. Разложение целой функции в бесконечное произведение.
4. Разложение мероморфной функции на простейшие дроби.
5. Эллиптические функции и связанные с ними.
6. Гамма функция.

Рекомендуемая литература:

1. Поммеренке Х. (Pommerenke Ch.) Univalent functions. – Vandenhoeck u. Ruprecht, Gottingen, 1975.
2. Александров И.А Методы геометрической теории аналитических функции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. 220 с.
3. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука. 1976.
4. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука. 1968.
5. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука. 1970.
6. Гутлянский В. Я. Геометрическая и топологическая теория функций и отображений / В. Я. Гутлянский, В. И. Рязанов // Киев: Наукова Думка, серия «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика».-2011.

Область исследования: **Геометрическая теория функций одного и многих комплексных переменных, конформные отображения и их обобщения (квазиконформные, биголоморфные и т. п.)**

1. Геометрические свойства тригонометрических и обратных к ним функций.
2. Формула Шварца для конформного отображения на круговые области.
3. Теоремы искажения и вращения.
4. Экстремальные задачи на классах голоморфных функций и методы их решения.

Рекомендуемая литература:

1. Александров И.А. Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука. 1976.
2. Александров И.А. Метод внутренних вариаций в теории однолистных отображений. / И.А. Александров, И.А. Колесников, С.А. Копанев, Л.С. Копанева. Томск: Изд-во Том. ун-та. 2017.
3. Поммеренке Х. (Pommerenke Ch.) Univalent functions. – Vandenhoeck u. Ruprecht, Gottingen, 1975.
4. Гутлянский В. Я. Геометрическая и топологическая теория функций и отображений / В. Я. Гутлянский, В. И. Рязанов // Киев: Наукова Думка, серия «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика».-2011.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М: Лань, 2002
6. Александров И.А Методы геометрической теории аналитических функции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. 220 с.

Область исследования: **Краевые задачи для аналитических функций, приложения теории потенциала в комплексном анализе и комплексная теория потенциала, в т. ч. субгармонические и плюрисубгармонические функции**

1. Функция Грина для односвязной области.
2. Краевая задача Римана для односвязной области.
3. Краевая задача Гильберта для односвязной области.

Рекомендуемая литература:

1. Гахов. Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука. 1977.
2. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций Т.2. Спб.: Лань. 2006.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М: Лань, 2002

4. Пример экзаменационного билета

1. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.
2. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах.
3. Теорема Дугунджи.