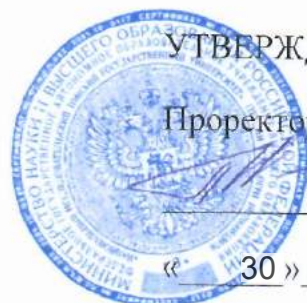


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по ОД

Е.В. Луков

« 30 » сентября 2022г.

**ПРОГРАММА**

**кандидатского экзамена по научной специальности**

*1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика*

Программа кандидатского экзамена по научной специальности *1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика* рассмотрена и рекомендована к утверждению ученым советом механико-математического факультета

протокол № 38 от 29.09.2022

**Авторы-разработчики:**

1. *Емельянова Татьяна Вениаминовна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ*
2. *Пергаменников Сергей Маркович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры математического анализа и теории функций ММФ*
3. *Пчелинцев Евгений Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математического анализа и теории функций ММФ*

Согласовано:

Руководитель ОП



*Пергаменников Сергей Маркович*

## 1. Общие положения

На основании постановления Правительства Российской Федерации от 23.09.2013 № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» кандидатские экзамены сдаются в соответствии с научной специальностью (научными специальностями) и отраслью науки, предусмотренными номенклатурой научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, утверждаемой Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (далее – Минобрнауки России), по которым осуществляется подготовка (подготовлена) диссертации.

Кандидатский экзамен по специальной дисциплине в соответствии с темой диссертации на соискание ученой степени кандидата наук представляет собой форму оценки степени подготовленности соискателя ученой степени к проведению научных исследований по научной специальности *1.1.4. «Теория вероятностей и математическая статистика»* по физико-математическим наукам (далее – кандидатский экзамен).

Программа кандидатского экзамена разработана на основе Паспорта научной специальности *1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика* (далее – Программа), утвержденного ВАК при Минобрнауки России <https://drive.google.com/drive/folders/1RNYkXhvAzaEF85GqxOH8HhbenJIoUMR7>.

Организация и проведение приема кандидатского экзамена осуществляется в соответствии с установленным в НИ ТГУ порядком.

Подготовка по Программе может осуществляться как самостоятельно, так и в рамках освоения соответствующей программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре НИ ТГУ. Сдача аспирантом кандидатского экзамена является обязательным условием обучения и относится к оценке результатов освоения базовой дисциплины (модуля) образовательного компонента программы, осуществляемой в рамках промежуточной аттестации.

## 2. Структура кандидатского экзамена и шкала оценивания уровня знаний

Кандидатский экзамен проводится в форме устного экзамена по билетам продолжительностью один академический час и состоит из следующих частей:

1. Основные вопросы (не более трёх вопросов по содержанию курса «*Теория вероятностей и математическая статистика*»).
2. Дополнительные вопросы (не более трёх вопросов из 2-го раздела содержания Программы).

Оценка уровня знаний по каждому вопросу осуществляется по пятибалльной шкале со следующим принципом перерасчета:

«отлично» – 5 баллов;

- «хорошо» – 4 балла;
- «удовлетворительно» – 3 балла;
- «неудовлетворительно» – 1-2 балла.

При оценивании ответов на каждый из вопросов экзаменационного билета учитываются следующие критерии:

Ответ на вопрос исчерпывающий, продемонстрировано понимание и знание сути вопроса в полном объеме. Замечаний нет.	5 баллов
Ответ на вопрос неполный, но раскрывающий основную суть вопроса, продемонстрировано понимание и знание вопроса в достаточном объеме. Замечания незначительные.	4 балла
Ответ неполный с существенными замечаниями, знания по вопросу фрагментарные и частичные, в том числе и по тематике диссертационного исследования.	3 балла
Ответ на вопрос отсутствует или дан неправильный	1-2 балла

Итоговая оценка за кандидатский экзамен выставляется решением экзаменационной комиссии:

«отлично» – при наличии не менее 80% 5-балльных ответов и отсутствии 3-2-1-балльных ответов;

«хорошо» – при наличии не менее 80% 4-балльных ответов и отсутствии 2-1-балльных ответов;

«удовлетворительно» – при наличии более 20% 3-балльных ответов и отсутствии 2-1-балльных ответов;

«неудовлетворительно» – при наличии 1-2 балльного ответа (или отказа отвечать на вопрос).

### 3. Перечень тем и вопросов для подготовки к сдаче экзамена

#### Раздел 1. Основные вопросы

##### Тема 1. Вероятностные меры

1. Алгебры и сигма-алгебры. Конечные и бесконечные измеримые пространства.

2. Теорема Каратеодори о продолжении мер.

3. Примеры наиболее важных для теории вероятностей измеримых пространств  $R^1$ ,  $R^n$ ,  $R^\infty$ ,  $R^T$ .

4. Построение вероятностной меры в  $R^\infty$ . Теорема Колмогорова.

5. Схема Бернулли с бесконечным числом испытаний. Гауссовские последовательности.

6. Вероятностное пространство. Аксиоматика Колмогорова.

7. Измеримые функции. Равномерная сходимость, сходимость почти всюду и сходимость по мере.

8. Определение интеграла Лебега и его связь с интегралом Лебега-Стилтьеса в  $\mathbb{R}^1$ .

9. Мера, определяемая с помощью интеграла Лебега. Производная Радона-Никодима.

10. Произведения мер. Теорема Фубини.

11. Пространства  $L_1$  и  $L_2$  и их характеристики.

12. Сходимость в среднем. Ортогональность или некоррелированность случайных величин. Проекция случайной величины на подпространство, порожденное другими случайными величинами.

13. Независимость событий и сигма-алгебр. Условные вероятности и условные математические ожидания.

#### Тема 2. Случайные величины и распределения в $\mathbb{R}^n$

1. Определение и основные свойства функции распределения и характеристической функции случайных величин. Формулы обращения, равенство Парсеваля. Теорема непрерывности.

2. Центральная предельная теорема. Теорема Берри-Эссеена.

3. Безгранично делимые распределения. Представление Леви-Хинчина логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.

4. Вероятности больших отклонений.

#### Тема 3. Последовательности случайных величин

1. Закон нуля или единицы.

2. Усиленный закон больших чисел.

3. Закон повторного логарифма.

4. Стационарность, эргодичность, теорема Биркгофа-Хинчина.

#### Тема 4. Случайные процессы. Распределения в функциональных пространствах

1. Слабая сходимость, относительная компактность и плотность семейств вероятностных мер.

2. Непрерывность и дифференцируемость случайной функции.

3. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и свойства его траекторий.

4. Стохастический интеграл от неслучайной функции и его основные свойства. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса и его корреляционной функции. Теорема Бохнера-Хинчина.

5. Линейные преобразования стационарных процессов, интегрирование и дифференцирование. Линейное прогнозирование. Гауссовские процессы.

#### Тема 5. *Некоторые виды зависимости*

1. Мартингалы и полумартингалы. Тождество Вальда.
2. Теоремы о сходимости мартингалов.
3. Цепи Маркова, классификация состояний, условия эргодичности.
4. Процессы рождения и гибели, ветвящиеся процессы, скачкообразные процессы.
5. Марковские процессы и полугруппы. Уравнения Колмогорова.

#### Тема 6. *Стохастическое исчисление и диффузионные процессы*

1. Стохастический интеграл. Формула Ито.
2. Существование и единственность решений стохастических дифференциальных уравнений.
3. Исследование распределений функционалов от диффузионных процессов с помощью дифференциальных уравнений.

#### Тема 7. *Элементы математической статистики*

1. Достаточные статистики и сигма-алгебры. Критерий факторизации.
2. Полнота семейств распределений. Экспоненциальные семейства.
3. Теорема Рао -Блекуэлла - Колмогорова. Использование для построения наилучшей несмещенной оценки.
4. Несмещенность. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией. Неравенство Рао-Крамера.
5. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия.
6. Простая гипотеза. Критерий для проверки простых гипотез. Ошибки 1-го и 2-го родов. Мощность критерия. Лемма Неймана- Пирсона.

#### **Рекомендуемая литература**

##### ***Основная литература***

- [1] Ширяев А.Н. Вероятность. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007.
- [2] Боровков А.А. Теория вероятностей. 4-е изд. М.: УРСС, 2003.
- [3] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
- [4] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Физматлит, 1996.
- [5] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 10-е изд. М.: УРСС, 2011.
- [6] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.

##### ***Дополнительная литература***

- [7] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.

- [8] Боровков А.А. Математическая статистика. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008.
- [9] Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Физматлит, 1987.
- [10] Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
- [11] Энциклопедия "Вероятность и математическая статистика" / Под ред. Ю.В. Прохорова. М.: Российская энциклопедия, 1999.
- [12] Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов М. Наука. 1977.
- [13] Крамер Г. Математические методы статистики. М. Мир. 1975.
- [14] Прохоров Ю.В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М. Наука. 1967.

## **Раздел 2. Дополнительные вопросы.**

Область исследования: **Основания теории вероятностей**

1. Построение вероятностных пространств с произвольным числом элементарных событий.
2. Вероятность на булевой алгебре, булевой  $\sigma$ -алгебре. Вероятностное пространство.
3. Продолжение вероятности с булевой алгебры на порожденную  $\sigma$ -алгебру.
4. Измеримые отображения.
5. Интеграл Лебега по вероятностной мере. Определение и вычисление числовых характеристик распределений случайных величин и векторов.
6. Основные свойства условных математических ожиданий и вероятностей. Формула Байеса.

### **Рекомендуемая литература**

- [1] Ширяев А.Н. Вероятность. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007.
- [2] Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
- [3] Лоев М. Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.

Область исследования: **Теория вероятностей на алгебраических и топологических структурах**

1. Определение случайных элементов. Определение и основные свойства математических ожиданий случайных элементов.
2. Производная Малявина. Формула Кларка–Окна.
3. Интеграл Скорохода.

### **Рекомендуемая литература**

- [1] Прохоров Ю.В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М. Наука, 1967.

[2] Malliavin P., Thalmaier A. Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance. Berlin: Springer, 2005.

[3] Bell D. The Malliavin Calculus. Dover, 2007.

Область исследования: **Комбинаторная теория вероятностей**

1. Примеры вероятностных пространств с конечным и счетным числом исходов.
2. Вычисление вероятностей комбинаторными методами. Распределения Бернулли и биномиальные распределения.
3. Вычисление условных вероятностей и условных математических ожиданий комбинаторными методами.
4. Теорема Муавра – Лапласа.

**Рекомендуемая литература**

[1] Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М. Наука, 1970.

[2] Ширяев А.Н. Вероятность. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007.

[3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под редакцией В.С. Королюка. М. Наука, 1985.

Область исследования: **Геометрическая вероятность и стохастическая геометрия**

1. Построение вероятностных пространств и вычисление вероятностей на прямой и плоскости.
2. Построение вероятностных пространств и вычисление вероятностей на круге и на сфере.
3. Построение вероятностных пространств и вычисление вероятностей на призмах и цилиндрах.

**Рекомендуемая литература**

[1] Прохоров Ю.В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М. Наука, 1967.

[2] Ширяев А.Н. Вероятность. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2007.

[3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под редакцией В.С. Королюка. М. Наука, 1985.

Область исследования: **Теория распределений**

1. Вычисление распределений случайных величин и векторов.
2. Бесконечномерные распределения. Винеровское пространство.
3. Пространство Скорохода.
4. Условно-гауссовские распределения.

**Рекомендуемая литература**



- [1] Прохоров Ю.В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1967.
- [2] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 10-е изд. М.: УРСС, 2011.
- [3] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.

Область исследования: **Предельные теоремы**

- 1. Принцип инвариантности Донскера.
- 2. Усиленный закон больших чисел для мартингалов.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Жакод Дж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов, в 2-х томах. М.: Физматлит, 1994.
- [2] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
- [3] Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
- [4] Ламперти Дж. Вероятность. М.: Физматлит, 1973.

Область исследования: **Стохастические процессы (точечные, гауссовские, мартингалы и другие)**

- 1. Определение и основные свойства процессов Пуассона, меры Пуассона.
- 2. Определение и основные свойства процессов Леви. Мера Леви.
- 3. Дробное броуновское движение.
- 4. Теоремы о представлениях мартингалов.
- 5. Квадратично интегрируемые мартингалы. Теорема Гирсанова.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
- [2] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
- [3] Cont R., Tankov P. Financial Modelling with Jump Processes. Boca Raton: Chapman and Hall, 2004.
- [4] Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

Область исследования: **Стохастический анализ и стохастическая оптимизация**

- 1. Стохастические интегралы по мартингалам.
- 2. Стохастические интегралы по семимартингалам.
- 3. Формула Ито.
- 4. Определение стохастической устойчивости.
- 5. Задача оптимизации функций со случайными ошибками в наблюдениях.
- 6. Процедура стохастической аппроксимации. Процедура Робинса - Монро.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

- [2] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
- [3] Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
- [4] Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972.

Область исследования: **Стохастические дифференциальные уравнения**

1. Сильные и слабые решения. Пример Цирильсона.
2. Решение линейных стохастических дифференциальных уравнений.
3. Процесс Орнштейна - Уленбека.
4. Геометрическое броуновское движение. Модель Блэка – Шоулса.
5. Связь параболических и эллиптических уравнений в частных производных со стохастическими дифференциальными уравнениями. Формула Каца.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
- [2] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982.
- [3] Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.

Область исследования: **Марковские процессы и поля, а также связанные с ними модели**

1. Марковские процессы в непрерывном времени с конечным числом состояний. Матрица интенсивностей.
2. Модели скрытых марковских цепей.
3. Свойство геометрической эргодичности. Критерий функций Ляпунова.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М.: Физматлит, 1963.
- [2] Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967.
- [3] Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981.
- [4] Meyn S.P., Tweedie R.L. Markov chains and stochastic stability. Cambridge University Press, 2009.

Область исследования: **Стационарные случайные процессы и поля**

1. Определение и основные свойства стационарных процессов в узком и широком смысле.
2. Представление Вальда.

3. Спектральная мера стационарных процессов. Стохастический интеграл по стационарному процессу в  $L_2$ .

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Физматлит, 1996.  
[2] Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967.  
[3] Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. М.: Физматлит, 1990.  
[4] Ламперти Дж. Случайные процессы. Киев: Вища школа, 1983.

Область исследования: **Теория восстановления и теория массового обслуживания**

1. Процесс восстановления. Функция восстановления и уравнение восстановления.
2. Первая Теорема Блекуэлла.
3. Определение прямой интегрируемости по Риману. Теорема Смита.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Киев: Вища школа, 1979.  
[2] Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967.  
[3] Mikosch T. Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with Stochastic Processes. Berlin: Springer, 2009.  
[4] Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

Область исследования: **Теория случайных матриц**

1. Определение случайных матриц и основные примеры.
2. Авторегрессионные процессы со случайными коэффициентами.
3. Многомерные линейные процессы со случайными коэффициентами.
4. Модели скрытых марковских цепей.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход. М.: Наука, 1989.  
[2] Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967.  
[3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под редакцией В.С. Королюка. М. Наука, 1985.

Область исследования: **Некоммутативная теория вероятностей и математическая статистика**

1. Определение и основные задачи некоммутативной (квантовой) теории вероятностей.
2. Фундаментальные направления в некоммутативной (квантовой) математической статистике.
3. Многомерные стохастические интегралы.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Meyer P.A. Quantum Probability for Probabilists. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [2] Cuculescu I., Oprea A.G. Noncommutative Probability. Berlin: Springer, 1994.
- [3] Biane P., Guionnet A., Voiculescu D.V. Noncommutative Probability and Random Matrices at Saint-Flour. Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- [4] Попов Н.Н. Некоторые задачи теории квантовых вероятностей. М.: Изд-во ВЦ РАН, 1991.
- [5] Попов Н.Н. Элементы теории квантовых вероятностей. М.: Изд-во ВЦ РАН, 1996.
- [6] Хренников А.Ю. Неколмогоровские теории вероятностей и квантовая физика. М.: Физматлит, 2003.
- [7] Холево А.С. Квантовая вероятность и квантовая статистика // Теория вероятностей - 8. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 83. М.: ВИНТИ, 1991.

Область исследования: **Методы статистического моделирования**

1. Построение случайных величин и случайных векторов по заданному распределению.
2. Датчики случайных чисел.
3. Методы Монте-Карло.
4. Статистические процессы в колебательных системах. уравнения Эйнштейна — Фоккера.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - 2-е изд., перераб. и испр. М.: Наука, 1981.
- [2] Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.
- [3] Fishman G.S. Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications. Springer, 1996.
- [4] Кнут Д. Искусство программирования. - 3-е изд. М.: «Вильямс», 2007. - Т. 2. Получисленные алгоритмы. Глава 3. Случайные числа.
- [5] Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. - 3-е изд. СПб.: Питер, 2004.
- [6] L'Ecuyer P. Random Number Generation // Springer Handbooks of Computational Statistics. - 2007. - С. 93-137.

Область исследования: **Основания математической статистики**

1. Предмет и метод математической статистики. Проблема статистического вывода.
2. Связь математической статистики с теорией вероятностей.
3. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливленко-Кантелли.
4. Связь статистических распределений с вероятностными.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. М.: Наука, 1960.
- [2] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.
- [3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под редакцией В.С. Королюка. М. Наука, 1985.

Область исследования: **Оценивание параметров распределений. Проверка статистических гипотез**

1. Метод моментов. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия.
2. Эффективность оценок.
3. Доверительные интервалы. Двойственность задач доверительного оценивания и проверки статистических гипотез.
4. Проверка простой гипотезы в полиномиальной схеме Бернулли. Теорема Пирсона о предельном распределении статистики хи-квадрат. Критерий хи-квадрат.
5. Проверка гипотез однородности компонент случайного вектора.
6. Байесовский метод оценивания и проверки статистических гипотез.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Боровков А.А. Математическая статистика. 3-е изд. СПб.: Лань, 2010.
- [2] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.
- [3] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под редакцией В.С. Королюка. М. Наука, 1985.
- [4] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Наука, 2003.
- [5] Леман Э. Теория точечного оценивания. М.: Наука, 1991. - 448 с.
- [6] Marin J.-M., Robert C.P. Bayesian Core: A Practical Approach to Computational Bayesian Statistics. Springer, 2007.

Область исследования: **Непараметрическая статистика**

1. Методы оценивания плотности распределения вероятностей.
2. Оценивание функционалов от распределения.

3. Непараметрические критерии проверки гипотез однородности компонент случайного вектора.
4. Непараметрические критерии проверки гипотезы о независимости.
5. Ранговые критерии проверки статистических гипотез.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Большев Л. Н., Смирнов Н. В., Таблицы математической статистики, М., 1968
- [2] Боровков А.А. Математическая статистика. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008.
- [3] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.
- [4] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Наука, 2003.
- [5] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979. - 408 с. , 2-е изд. исправленное.
- [6] Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Анализ данных на компьютере: учебное пособие. - 4-е изд., перераб. - М.: ИД Форум, 2008. – 368 с.

#### **Область исследования: Многомерный анализ**

1. Многомерное нормальное распределение.
2. Оценивание вектора среднего и ковариационной матрицы. Распределение Уишарта.
3. Коэффициент корреляции. Частные коэффициенты корреляции. Множественный коэффициент корреляции.
4. Методы классификации наблюдений. Кластерный анализ.
5. Проверка гипотезы о независимости множеств случайных величин.
6. Дисперсионный анализ многомерных данных.
7. Метод главных компонент. Факторный анализ.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Андерсон Т.В. Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.
- [2] Большев Л.Н., Смирнов Н.В., Таблицы математической статистики, М., 1968.
- [3] Боровков А.А. Математическая статистика. 3-е изд. М.: Физматлит, 2008.
- [4] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.
- [5] Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Мир, 1976.
- [6] Андерсон Т.В. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.
- [7] Окунь Я. Факторный анализ. М.: Статистика, 1974.
- [8] Шеффе Г. Дисперсионный анализ. М.: Наука, 1980.
- [9] Rencher A.C. Methods of multivariate analysis. N.-Y.: John Wiley & Sons, Inc., 2002.

Область исследования: **Линейные модели, регрессия**

1. Задача регрессии. Линейная регрессионная модель. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова. Линейная регрессия в случае нормального распределения. Доверительные интервалы для параметров линейной регрессии в случае нормального распределения.
2. Обобщенные линейные модели. Регуляризация линейных моделей.
3. Задача регрессии и классификации в машинном обучении.

**Рекомендуемая литература**

- [1] Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика, 1981.
- [2] Маккаллах П. Нелдер Дж. Обобщенные линейные модели (2-е изд.). Бока-Ратон, Флорида: Чепмен и Холл / CRC, 1989.
- [3] Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980.
- [4] Friedman J., Hastie T., Tibshirani R. The elements of statistical learning. Springer, 2009.
- [5] Hastie T., Tibshirani R., Wainwright M. Statistical learning with sparsity: the lasso and generalizations. CRC Press, 2015.

Область исследования: **Планирование экспериментов**

1. Задача об оптимальном планировании. Оптимальный план эксперимента. Байесовский план эксперимента.
2. Оптимальное планирование для скалярной линейной регрессии.
3. Оптимальное планирование для многомерной регрессии.

**Рекомендуемая литература**

- [1] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: ЛКИ, 2010.
- [2] Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971.
- [3] Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. – М.: Мир, 1980.
- [4] Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под редакцией В.С. Королюка. М. Наука, 1985.

Область исследования: **Последовательный анализ**

1. Определение последовательных процедур.
2. Задача об оптимальной остановке.
3. Критерий Вальда.

**Рекомендуемая литература**

- [1] Вальд А. Последовательный анализ. М. Физматлит, 1960.
- [2] Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил остановки. М.: УРСС, 1977.

[3] Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. М.: Физматлит, 1976.

Область исследования: **Статистика случайных процессов и полей**

1. Оценивание параметров в стохастических разностных уравнениях.
2. Оценивание линейных параметров в стохастических дифференциальных уравнениях. Метод максимального правдоподобия.
3. Оценивание нелинейных параметров в стохастических дифференциальных уравнениях.
4. Оценивание функции регрессии в дискретном и непрерывном времени.
5. Свойство ЛАН для случайных процессов и полей.
6. Асимптотический анализ свойств оценок для параметров в стохастических моделях. Теорема Гаека – Ле Кама.
7. Асимптотический анализ свойств оценок для функций в стохастических моделях. Теорема Пинскера.

**Рекомендуемая литература**

- [1] Андерсон Т.В. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.
- [2] Ибрагимов И.А., Хасьминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979.
- [3] Кутоянц Ю.А. Оценивание параметров случайных процессов. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1980.
- [4] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974.
- [5] Kutoyants Y.A. Identification of Dynamical System with Small Noise. Dordrecht: Kluwer, 1994.
- [6] Kutoyants Y.A. Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. London: Springer, 2004.

Область исследования: **Анализ статистических данных**

1. Разведочный анализ данных (описательная статистика).
2. Многомерное шкалирование.
3. Обзор современного ПО для анализа данных.
4. Искусственные нейронные сети.

**Рекомендуемая литература**

- [1] Открытые источники в сети Internet.

Область исследования: **Финансовая и актуарная математика**

1. Модель Кокса – Росса – Рубенштейна.
2. Модели Блэка – Шоулса.



3. Модель Крамера – Лундберга.
4. Задача о разорении страховых компаний.
5. Задача оптимального потребления и инвестирования для непрерывного времени.
6. Стратегия Мертона.
7. Принцип стохастического динамического программирования.

#### **Рекомендуемая литература**

- [1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики (в 2-х томах). М.: Изд-во МЦНМО, 2016.
- [2] Karatzas I., Shreve S.E. Methods of Mathematical Finance. Springer, 1998.
- [3] Mikosch T. Non-Life Insurance Mathematics: An Introduction with Stochastic Processes. Berlin: Springer, 2009.

#### **4. Пример экзаменационного билета**

1. Построение вероятностной меры в  $\mathbb{R}^\infty$ . Теорема Колмогорова.
2. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс и свойства его траекторий.
3. Метод максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия.
4. Построение вероятностных пространств и вычисление вероятностей на прямой и плоскости.
5. Процесс Орнштейна - Уленбека.
6. Задача об оптимальной остановке.