МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по ОД

____________ Е.В. Луков

« 30 » сентября 2022г.

ПРОГРАММА

кандидатского экзамена по научной специальности
1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Томск – 2022

Программа кандидатского экзамена по научной специальности ***1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика*** рассмотрена и рекомендована к утверждению ученым советом *механико-математического факультета*

протокол № 38 от 29.09.2022

Авторы-разработчики:

1. *Крылов Петр Андреевич, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры алгебры ММФ*
2. *Тимошенко Егор Александрович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры алгебры ММФ*
3. *Чехлов Андрей Ростиславович, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры алгебры ММФ*

Согласовано:

Руководитель ОП *Крылов Петр Андреевич*

1. Общие положения

На основании постановления Правительства Российской Федерации от 23.09.2013 № 842 «О порядке присуждения ученых степеней» кандидатские экзамены сдаются в соответствии с научной специальностью (научными специальностями) и отраслью науки, предусмотренными номенклатурой научных специальностей, по которым присуждаются ученые степени, утверждаемой Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (далее – Минобрнауки России), по которым осуществляется подготовка (подготовлена) диссертации.

Кандидатский экзамен по специальной дисциплине в соответствии с темой диссертации на соискание ученой степени кандидата наук представляет собой форму оценки степени подготовленности соискателя ученой степени к проведению научных исследований по научной специальности *1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика* по физико-математическим наукам (далее – кандидатский экзамен).

Программа кандидатского экзамена разработана на основе Паспорта научной специальности *1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математик»* (далее – Программа), утвержденного ВАК при Минобрнауки России https://drive.google.com/drive/folders/1RNYkXhvAzaEF85GqxOH8HhbenJIoUMR7 .

Организация и проведение приема кандидатского экзамена осуществляется в соответствии с установленным в НИ ТГУ порядком.

Подготовка по Программе может осуществляться как самостоятельно, так и в рамках освоения соответствующей программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре НИ ТГУ. Сдача аспирантом кандидатского экзамена является обязательным условием обучения и относится к оценке результатов освоения базовой дисциплины (модуля) образовательного компонента программы, осуществляемой в рамках промежуточной аттестации.

2. Структура кандидатского экзамена и шкала оценивания уровня знаний

Кандидатский экзамен проводится в форме устного экзамена по билетам продолжительностью один академический час и состоит из следующих частей:

1. Основные вопросы (не более трёх вопросов по содержанию курса *«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»*).

2. Дополнительные вопросы (не более трёх вопросов из 2-го раздела содержания Программы).

Оценка уровня знаний по каждому вопросу осуществляется по пятибалльной шкале со следующим принципом перерасчета:

«отлично» – 5 баллов;

«хорошо» – 4 балла;

«удовлетворительно» – 3 балла;

«неудовлетворительно» – 1-2 балла.

При оценивании ответов на каждый из вопросов экзаменационного билета учитываются следующие критерии:

Ответ на вопрос исчерпывающий, продемонстрировано понимание и знание сути вопроса в полном объеме. Замечаний нет.	5 баллов
Ответ на вопрос неполный, но раскрывающий основную суть вопроса, продемонстрировано понимание и знание вопроса в достаточном объеме. Замечания незначительные.	4 балла
Ответ неполный с существенными замечаниями, знания по вопросу фрагментарные и частичные, в том числе и по тематике диссертационного исследования.	3 балла
Ответ на вопрос отсутствует или дан неправильный	1-2 балла

Итоговая оценка за кандидатский экзамен выставляется решением экзаменационной комиссии:

«отлично» – при наличии не менее 80% 5-балльных ответов и отсутствии 3-2-1-балльных ответов;

«хорошо» – при наличии не менее 80% 4-балльных ответов и отсутствии 2-1-балльных ответов;

«удовлетворительно» – при наличии более 20% 3-балльных ответов и отсутствии 2-1-балльных ответов;

«неудовлетворительно» – при наличии 1-2 балльного ответа (или отказа отвечать на вопрос).

3. Перечень тем и вопросов для подготовки к сдаче экзамена

Раздел 1. Основные вопросы (по содержанию курса *«Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика»*).

Тема 1. *Математическая логика и теория алгоритмов*

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.

2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.

3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства.

4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ.

5. Логика высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.

6. Представимость булевых функций формулами логики высказываний.

7. Полные системы логических связок. Штрих Шеффера и стрелка Пирса.

8. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.

9. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой (пренексной) нормальной форме.

10. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.

11. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.

12. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.

13. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.

14. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).

15. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.

16. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.

17. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

Тема 2. *Алгебра*

1. Теоремы Силова.

2. Простота группы A_n , $n \geq 5$, и SO_3.

3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.

4. Прямые суммы циклических p-групп. Теорема Куликова.

5. Строение делимых абелевых групп. Делимая оболочка.

6. Теорема Бэра–Куликова–Капланского о прямых слагаемых вполне разложимых абелевых групп.

7. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.

8. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.

9. Произведения колец и прямые суммы идеалов.

10. Теоремы Веддерберна–Артина–Молина для артиновых полупримитивных колец и полупростых конечномерных алгебр.

11. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.

12. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.

13.Три теоремы об изоморфизмах для модулей.

14. Инъективные модули. Лемма Бэра. Критерии инъективности. Инъективные оболочки.

15. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа–Витта.

16. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.

17. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.

18. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Тема 3. *Теория чисел*

1. Мультипликативные функции. Функции $\varphi(n)$, $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\mu(n)$.

2. Квадратичный закон взаимности и его следствия.

3. Первообразные корни и индексы.

4. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.

5. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел.

6. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

7. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.

8. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.

9. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм.

10. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.

11. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел. Трансцендентность чисел e и π.

Тема 4. *Дискретная математика*

1. Теорема Шеннона о разложении булевых функций по переменным. Нормальные формы.
2. Минимизация булевых функций. Метод Квайна.
3. Замкнутые и полные системы булевых функций.
4. Теорема Поста о полноте.
5. Реализация булевых функций релейно-контактными схемами и схемами из функциональных элементов.
6. Изоморфизм графов. Группа автоморфизмов графа.
7. Матрицы графов. Матричная теорема Кирхгофа о деревьях.
8. Деревья. Характеризации деревьев. Кодирование деревьев. Код Прюфера.
9. Пути и циклы Эйлера. Характеризации эйлеровых графов.
10. Укладки графов. Планарность. Формула Эйлера. Теорема Понтрягина-Куратовского.

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудноpешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. Изд. 2. М.: Наука, 1987.

3. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. Изд. 2. М.: Наука, 1986.

4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Изд. 3. М.: Наука, 1984.

5. Новиков П.С. Элементы математической логики. Изд. 2. М.: Наука, 1973.

6. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

7. Романович В.А. Лекции по математической логике. Томск: ТГУ, 2005.

8. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. М.: Академия, 2008.

9. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.

10. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.

11. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.

12. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.

13. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

14. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.

15. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Книга по Требованию, 2012 – 420 с.

16. Боревич З.И., Шафаревич И.Р., Теория чисел. М., 2019. 504 с.

17. Виноградов И.М. Основы теории чисел. Лань, 2010 – 176 с.

18. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

19. Мальцев И.А. Дискретная математика. СПб: Лань, 2016.

20. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. СПб: Лань, 2016.

21. Ландо С.К. Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2012.

Дополнительная литература

1. Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.

2. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра, Тома 1, 2. Москва, 2003.

3. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

4. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.

5. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.

6. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в

7. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. URSS, 2004 – 184 с.

8. Манин Ю.И., Панчишкин А.А. Введение в современную теорию чисел. М.: МЦНМО, 2009 – 552 с.

9. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.

10. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

11. Серр Ж.П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.

12. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.

13. Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. СПб.: Лань.

14. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич В.И. Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990.

15. Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика. Москва, 2004.

Раздел 2. Дополнительные вопросы *(по направлению исследований аспирантов)*

Область исследования: Абелевы группы

1. Коциклические группы и их строение.
2. Существование высоких подгрупп.
3. Свободные группы, связь с проективностью.
4. Теоремы Прюфера и Бэра.
5. Подгруппы прямых сумм циклических групп.
6. Делимые группы. Инъективность и ее связь с делимостью.
7. Теорема Бэра о делимых подгруппах.
8. Конечно копорожденные группы.
8. Вполне разложимые группы без кручения. Изоморфизм таких групп.
9. Теорема Бэра–Куликова–Капланского о прямых слагаемых вполне разложимых групп.
10. Сепарабельные группы без кручения. Счетные и однородные сепарабельные группы.

11. Теорема Фукса о прямых слагаемых сепарабельных групп.

12. Векторные группы. Теоремы Мишиной и Сонсяды о таких группах.

13. Смешанные группы. Расщепляющиеся смешанные группы.

14. Критерий расщепляемости Бэра–Фомина для смешанных групп.

15. Высотные матрицы и смешанные группы.

16. Смешанные группы ранга без кручения 1 и некоторые другие классы смешанных групп, близкие к ним.

Рекомендуемая литература.

а) основная литература:

1. Курош А.Г. Теория групп. М.: Физматлит, 2011.

2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.

3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.

4. Каргаполов Ю.П., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. СПб.: Лань, 2009.

5. Fuchs L. Abelian groups. Cham: Springer, 2015.

б) дополнительная литература:

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Мир, 1976.

2. Kaplansky I. Infinite Abelian groups.

Область исследования: Кольца и модули

1. Подкольца, идеалы и факторкольца. Теорема о гомоморфизмах колец.

2. Кольца операторов, функций, многочленов, рядов, матриц.

3. Прямые суммы и произведения модулей.

4. Простые и полупростые модули. Теорема о цоколе модуля.

5. Конечно порожденные модули. Артиновы и нётеровы кольца и модули.

6. Проективные и свободные модули. Критерии проективности модуля.

7. Ниль-радикал, первичный радикал и радикал Джекобсона кольца. Теорема о радикале артинова кольца.

8. Группа гомоморфизмов модулей. Теорема об индуцированных точных последовательностях для группы Hom.

9. Тензорное произведение модулей и его свойства. Теорема об индуцированных точных последовательностях для тензорного произведения.

Рекомендуемая литература.

а) основная литература:

1. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.

2. Каш Ф. Модули и кольца. М.: Мир, 1981.

3. Джекобсон Н. Строение колец. М.: Иностранная литература, 1961.

б) дополнительная литература:

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.

2. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.

3. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. М.: Мир, 1974.

4. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. М.: Мир, 1977.

3. Примеры экзаменационных билетов

Билет № 1.

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.

2. Теоремы Силова.

3. Мультипликативные функции. Функции $\varphi(n)$, $\tau(n)$, $\sigma(n)$, $\mu(n)$.

4. Теорема Бэра–Куликова–Капланского о прямых слагаемых вполне разложимых групп.

Билет № 2.

1. Квадратичный закон взаимности и его следствия.

2. Простота группы A_n , $n \geq 5$, и SO_3.

3. Пути и циклы Эйлера. Характеризации эйлеровых графов.

4. Конечно порожденные модули. Артиновы и нётеровы кольца и модули.