

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет



УТВЕРЖДАЮ

Декан ММФ Гензе Л.В.

« 15 » *сентября* 2025г.

ПРОГРАММА

вступительного испытания по специальной дисциплине
соответствующей научной специальности программы подготовки научных и
научно-педагогических кадров в аспирантуре

1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика
цифр и наименование научной специальности

Томск - 2025

Авторы-разработчики:

*Пергаменщиков Сергей Маркович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры
математического анализа и теории функций ММФ*

*Пчелинцев Евгений Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры
математического анализа и теории функций ММФ*

Согласовано:

Руководитель ОП



подпись

С.М. Пергаменщиков

Общие положения

1.1. Программа вступительного испытания по специальной дисциплине соответствующей научной специальности программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре 1.1.4. «Теория вероятностей и математическая статистика» (далее – Программа), сформирована на основе требований федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования к программам магистратуры (специалитета) по соответствующим направлениям (специальностям) подготовки. Программа разработана для поступления на обучение в аспирантуру НИ ТГУ.

Программой устанавливается:

- форма, структура, процедура сдачи вступительного испытания;
- шкала оценивания;
- максимальное и минимальное количество баллов для успешного прохождения вступительного испытания;
- критерии оценки ответов.

Вступительное испытание проводится на русском языке или на английском языке для абитуриентов из стран дальнего зарубежья, поступающих на программу, реализуемую на английском языке.

Форма, процедура сдачи вступительного испытания, а также шкала оценивания и критерии оценки ответов экзаменуемого, установленные Программой, не зависят от языка проведения вступительного испытания.

1.2. Организация и проведение вступительного испытания осуществляется в соответствии с Правилами приема, утвержденными приказом ректора НИ ТГУ, действующими на текущий год поступления.

1.3. По результатам вступительного испытания, поступающий имеет право подать на апелляцию о нарушении, по мнению поступающего, установленного порядка проведения вступительного испытания и (или) о несогласии с полученной оценкой результатов вступительного испытания в порядке, установленном Правилами приема, действующими на текущий год поступления.

2. Форма, структура, процедура, программа вступительного испытания и шкала оценивания ответов

2.1. Вступительное испытание по специальной дисциплине проводится в форме устного экзамена в соответствии с перечнем тем и (или) вопросов, установленных данной Программой.

Структура экзамена: собеседование по вопросам, которые формируются на основе программ общих и специальных курсов по теории вероятностей и математической статистике, читаемых в рамках университетских бакалаврских и магистерских программ по специальностям «Математика» или «Прикладная

математика».

Абитуриент получает два вопроса из теоретической части программы собеседования. Ему предоставляется до 60 минут на подготовку и 15-30 минут на ответ. По решению приемной комиссии один или оба теоретических вопроса могут быть заменены задачами по материалу теоретической части. Собеседование проводится на русском или английском языке (по желанию абитуриента).

2.2. Процедура проведения экзамена представляет собой сдачу экзамена в очной форме или с использованием дистанционных технологий (при условии идентификации поступающих при сдаче ими вступительных испытаний):

очно или дистанционно.

Для дистанционных вступительных испытаний используются платформа «Среда электронного обучения iDO» и другие программы для организации видеоконференций. Для наблюдения за участниками экзамена и идентификации их личности в НИ ТГУ создана система прокторинга. Проктор (наблюдатель) перед началом каждого экзамена при помощи веб-камеры поступающего проводит инструктаж и собеседование по вопросам организации и проведения экзамена, идентификацию личности путем сравнения фото в паспорте и лица сдающего (поступающий показывает в веб-камеру свой паспорт в развернутом виде рядом со своим лицом).

Видео, транслируемое с веб-камеры участника экзаменов, доступно проктору для наблюдения и записывается на сервер для дальнейшего просмотра при возникновении спорных ситуаций. Результаты проведения вступительного испытания оформляются протоколом, в котором фиксируются вопросы экзаменаторов к поступающему. На каждого поступающего ведется отдельный протокол.

2.3. Программа экзамена.

Примерный перечень тем и вопросов для подготовки к сдаче экзамена и формирования билетов.

Раздел 1. Теория вероятностей

1. Основные вероятностные схемы и понятия теории вероятностей
 - 1.1. Пространство элементарных событий. Алгебра и σ – алгебра событий. Операции над событиями и их свойства.
 - 1.2. Классическое определение вероятности. Дискретные вероятностные пространства. Геометрические вероятности. Непрерывные вероятностные пространства.
 - 1.3. Аксиомы вероятности (система Колмогорова). Свойства вероятности.
2. Условные вероятности и независимость
 - 2.1. Понятие условной вероятности. Вероятность совместного осуществления событий (формула умножения вероятностей).

- Независимость системы событий.
- 2.2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
- 3. Последовательность независимых испытаний
 - 3.1. Вероятностное описание последовательности независимых испытаний (схема Бернулли). Дискретные вероятностные распределения, связанные с последовательностью независимых испытаний.
- 4. Случайные величины и распределения вероятностей
 - 4.1. Понятие случайной величины (идея и формальное определение).
 - 4.2. Функция распределения случайной величины и ее свойства.
 - 4.3. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины и соответствующие вероятностные распределения. Общее описание. Основные виды дискретных и абсолютно непрерывных вероятностных распределений.
 - 4.4. Совместные распределения системы случайных величин. Независимость случайных величин.
 - 4.5. Распределения функций от случайных величин.
- 5. Числовые характеристики случайных величин и соответствующих вероятностных распределений
 - 5.1. Определение математического ожидания случайной величины. Свойства математического ожидания.
 - 5.2. Определение дисперсии случайной величины. Свойства дисперсии.
 - 5.3. Моменты и центральные моменты высших порядков.
 - 5.4. Ковариация и коэффициент корреляции случайных величин.
 - 5.5. Классические неравенства, связанные с моментами. Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Минковского. Неравенство Чебышева.
 - 5.6. Условные математические ожидания и условные распределения вероятностей относительно отдельных событий. Условные математические ожидания относительно систем событий.
 - 5.7. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение и его моментные характеристики.
- 6. Предельные теоремы в теории вероятностей
 - 6.1. Классические предельные теоремы в схеме независимых испытаний (локальная и интегральная).
 - 6.2. Математический аппарат для доказательства предельных теорем. Производящие функции. Характеристические функции случайных величин и их основные свойства. Связь характеристических функций с моментами.

Формула обращения и теорема единственности. Теорема непрерывности (необходимое и достаточное условие слабой сходимости в форме сходимости характеристических функций).

- 6.3. Закон больших чисел. Закон больших чисел в форме Хинчина. Теорема о достаточных условиях применимости закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.
- 6.4. Усиленный закон больших чисел. Теорема Колмогорова о достаточных условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательности независимых, произвольным образом распределенных случайных величин.
- 6.5. Центральная предельная теорема теории вероятностей и ее различные формы. Центральная предельная теорема для сумм независимых, одинаково распределенных случайных величин (теорема Ляпунова). Центральная предельная теорема для сумм произвольных независимых случайных величин. Условие Линдеберга.
7. Различные виды сходимостей последовательностей случайных величин
Сходимость по вероятности. Сходимость в среднем квадратическом, сходимость в среднем порядка p , $0 < p < \infty$. Сходимость с вероятностью, равной единице (сходимость почти наверное). Сходимость по распределению (слабая сходимость). Связи между различными видами сходимости.

Раздел 2. Основы теории случайных процессов

8. Понятие случайного процесса
 - 8.1. Случайный процесс как семейство случайных величин, зависящих от временного параметра. Случайный процесс как функция двух аргументов. Траектории случайного процесса. Конечномерные распределения случайного процесса.
 - 8.2. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданной системой конечномерных распределений.
9. Марковские процессы с дискретным временем и дискретным множеством состояний (цепи Маркова).
10. Мартингалы в дискретном времени.
 - 10.1. Вероятностное пространство с фильтрацией. Мартингалы, мартингальные преобразования.
 - 10.2. Марковские моменты и их основные свойства.
 - 10.3. Представление Дуба - Мейера.
11. Процессы с непрерывным временем.

- 11.1. Пуассоновский процесс. Различные определения пуассоновского процесса. Основные свойства пуассоновских процессов.
- 11.2. Винеровский процесс и его основные свойства.
- 11.3. Квадратично-интегрируемые мартингалы. Неравенство Дуба.
- 11.4. Интеграл Ито. Непрерывность траекторий интегралов.
- 11.5. Непрерывные семимартингалы. Формула Ито.
- 11.6. Мартингальная характеристика винеровского процесса (теорема Леви).
- 11.7. Линейное стохастическое уравнение, экспоненциальные мартингалы и условия равномерной интегрируемости.
- 11.8. Теорема Гирсанова.
- 11.9. Стохастические уравнения. Сильные и слабые решения. Условия существования сильного решения. Теорема о представлении функционалов, заданных на траекториях винеровского процесса.

Раздел 3. Математическая статистика

12. Основные понятия математической статистики.
Задачи математической статистики. Понятие выборки. Вариационный ряд выборки. Эмпирическая (выборочная) функция распределения. Свойства эмпирических функций распределения. Гистограмма. Выборочные моменты.
13. Основы теории оценивания неизвестных параметров распределений.
 - 13.1. Понятие точечной статистической оценки. Несмещенные оценки. Несмещенные оценки с минимальной дисперсией.
 - 13.2. Неравенство Рао – Крамера. Эффективность оценки. Критерий Бхаттачария оптимальности оценки.
 - 13.3. Оценки максимального правдоподобия. Определение. Уравнения правдоподобия. Общие свойства оценок максимального правдоподобия. Асимптотические свойства оценок максимального правдоподобия (состоятельность, асимптотическая нормальность).
 - 13.4. Интервальное (доверительное) оценивание. Построение доверительных интервалов с использованием распределения точечной оценки параметра.
14. Статистическая проверка гипотез
 - 14.1. Основные понятия и общие принципы теории проверки гипотез.
 - 14.2. Проверка гипотезы о виде распределения. Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия χ^2 – квадрат К. Пирсона. Критерий χ^2 – квадрат для сложной гипотезы. Критерий пустых ящиков.
 - 14.3. Гипотеза и критерии однородности. Критерий однородности Смирнова.

Критерий однородности хи – квадрат.

14.4. Гипотеза независимости. Критерий независимости хи – квадрат. Критерий Спирмена. Критерий Кендалла.

15. Регрессионный анализ

15.1. Модель линейной регрессии. Описание модели. Оценивание неизвестных параметров (коэффициентов регрессии) в модели линейной регрессии. Метод наименьших квадратов. Оптимальность оценки, полученной по методу наименьших квадратов.

15.2. Модель нормальной регрессии. Оценки максимального правдоподобия для неизвестных параметров нормальной регрессии. Совпадение оценок, полученных по методу наименьших квадратов с оценками максимального правдоподобия.

15.3. Общая линейная гипотеза нормальной регрессии. F – критерий для проверки линейной гипотезы.

Основная литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: издательство Едиториал УРСС, 2003.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: издательство ЛКИ, 2007.
3. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. – М.: издательство ЛКИ, 2010.
4. Ширяев А.Н. Вероятность (в двух томах). – М.: издательство МЦНМО, 2007.
5. Dekking F.M., Kraaikamp G., Lopuhaa H.P., Meester L.E.. A Modern Introduction to Probability and Statistics. Cambridge University Press, 2005.
6. Suhov Y., Kelbert M. Probability and Statistics by Example. Cambridge University Press, 2005.

Дополнительная литература

1. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Издательство Физматлит, 2007.
2. Ватутин В.А., Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков В.П. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах. – М.: Издательство Дрофа, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: издательство Высшая школа, 2000.
4. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И., Чистяков А. В. Задачи с решениями по математической статистике. – М.: издательство Дрофа, 2007.
5. Теория вероятностей и математическая статистика: энциклопедия.

Главный редактор Ю.В. Прохоров. – М.: издательство Большая Российская энциклопедия. 1999.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (в двух томах). – М.: издательство Книжный дом «Либроком», 2010.
7. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: издательство Дрофа, 2007.
8. Renyi A. Probability Theory. – Amsterdam, North-Holland, 1970.
9. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. Наука. 1974.
10. Karatzas I., Shreve S. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer. 1991

2.5. Шкала оценивания ответов на экзамене:

неудовлетворительно	удовлетворительно	хорошо	отлично
до 59 баллов	60 – 75 баллов	76 – 84 баллов	85 – 100 баллов

Максимальное количество баллов за экзамен – 100. Минимальное количество баллов для успешного прохождения экзамена – 60. Поступающий, набравший менее 60 баллов за экзамен, не может быть зачислен в аспирантуру.

Таблица критериев оценки устных и письменных ответов (при наличии)

Вид деятельности		
Оценка	Балл	Уровень владения темой
неудовлетворительно	до 59	Ответ на поставленный вопрос не дан <i>или</i> Ответ неполный, отсутствует логичность повествования или допущены существенные логические ошибки
удовлетворительно	60-75	Ответ полный, допущены не существенные логические ошибки
хорошо	76-84	Ответ логичный, конкретный, присутствуют незначительные пробелы в знаниях материала программы
отлично	85-100	Ответ полный, логичный, конкретный, без замечаний, продемонстрированы знания материала программы, умение решать предложенные задачи

Вступительное испытание проводится экзаменационной комиссией, действующей на основании приказа ректора.

Итоговая оценка за экзамен определяется как средний балл, выставленный всеми членами экзаменационной комиссии.