

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет



УТВЕРЖДАЮ

Декан ММФ Гензе Л.В.

« 15 » января 2025г.

ПРОГРАММА

вступительного испытания по специальной дисциплине  
соответствующей научной специальности программы подготовки научных и  
научно-педагогических кадров в аспирантуре

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Томск - 2025

Авторы-разработчики:

*Крылов П.А., д.ф.-м.н, профессор, зав. кафедрой алгебры*

*Тимошенко Е.А., д.ф.-м.н, доцент, профессор кафедры алгебры*

Согласовано:

Руководитель ОП



П.А. Крылов

## **1. Общие положения**

**1.1.** Программа вступительного испытания по специальной дисциплине соответствующей научной специальности программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (далее - Программа), сформирована на основе требований федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования к программам магистратуры (специалитета) по соответствующим направлениям (специальностям) подготовки. Программа разработана для поступления на обучение в аспирантуру НИ ТГУ.

Программой устанавливается:

- форма, структура, процедура сдачи вступительного испытания;
- шкала оценивания;
- максимальное и минимальное количество баллов для успешного прохождения вступительного испытания;
- критерии оценки ответов.

Вступительное испытание проводится на русском языке.

**1.2.** Организация и проведение вступительного испытания осуществляется в соответствии с Правилами приема, утвержденными приказом ректора НИ ТГУ, действующими на текущий год поступления.

**1.3.** По результатам вступительного испытания, поступающий имеет право подать на апелляцию о нарушении, по мнению поступающего, установленного порядка проведения вступительного испытания и (или) о несогласии с полученной оценкой результатов вступительного испытания в порядке, установленном Правилами приема, действующими на текущий год поступления.

## **2. Форма, структура, процедура, программа вступительного испытания и шкала оценивания ответов**

**2.1.** Вступительное испытание по специальной дисциплине проводится в форме экзамена (письменно и устно) в соответствии с перечнем тем и (или) вопросов, установленных данной Программой.

**Структура экзамена.** Экзамен проводится по билетам.

**2.2.** Процедура проведения экзамена представляет собой сдачу экзамена в очной форме и (или) с использованием дистанционных технологий (при условии идентификации поступающих при сдаче ими вступительных испытаний):

очно и дистанционно.

Для дистанционных вступительных испытаний используются платформа «Среда электронного обучения iDO» и другие программы для организации

видеоконференций. Для наблюдения за участниками экзамена и идентификации их личности в НИ ТГУ создана система прокторинга. Проктор (наблюдатель) перед началом каждого экзамена при помощи веб-камеры абитуриента проводит инструктаж и собеседование по вопросам организации и проведения экзамена, идентификацию личности путем сравнения фото в паспорте и лица сдающего (абитуриент показывает в веб-камеру свой паспорт в развернутом виде рядом со своим лицом).

Видео, транслируемое с веб-камеры участника экзаменов, доступно проктору для наблюдения и записывается на сервер для дальнейшего просмотра при возникновении спорных ситуаций.

**2.3.** Результаты проведения вступительного испытания оформляются протоколом, в котором фиксируются вопросы экзаменаторов к поступающему. На каждого поступающего ведется отдельный протокол.

#### **2.4. Программа экзамена.**

Примерный перечень тем и вопросов для подготовки к сдаче экзамена:

##### **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.**

1. Логика высказываний. Исчисление высказываний, его корректность и полнота.
2. Логика предикатов первого порядка: язык, интерпретации, модели. Теорема компактности, теорема Лёвенгейма – Скулема. Исчисление предикатов первого порядка. Нестандартные модели арифметики.
3. Теории первого порядка. Полные теории. Категоричные в данной мощности теории. Разрешимые теории. Категоричность в счётной мощности, теории плотного порядка без первого и последнего элементов.
4. Парадоксы наивной теории множеств. Аксиоматическая теория множеств. Аксиома выбора. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело. Лемма Цорна. Континуум – гипотеза.
5. Общее понятие алгоритма. Варианты формализации понятия алгоритма. Универсальный алгоритм. Вычислимые функции, перечисляемые и разрешимые множества. Неразрешимые алгоритмические проблемы. Теорема Райса.
6. Первая теорема Геделя о неполноте формальной арифметики. Неразрешимость формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике. Теорема Черча о неразрешимости логики предикатов.
7. Время и память как меры сложности вычислений. Классы P, NP и PSPACE. Полиномиальная сводимость. NP – полные проблемы.

## АЛГЕБРА

1. Теоремы о гомоморфизмах групп. Классы сопряженных элементов. Центр и коммутант группы. Разрешимые группы. Теорема Силова.
2. Представления групп. Лемма Шура. Теорема Машке.
3. Характеры представлений. Определимость представления своим характером. Представления конечных групп.
4. Конечно порождённые модули над кольцами главных идеалов. Приложения конечно порождённых абелевых групп к теории жордановой нормальной формы.
5. Задание групп образующими элементами и определяющими соотношениями. Алгоритмические проблемы для конечно определённых групп.
6. Поля алгебраических чисел.
7. Конечные поля.
8. Нетеровы кольца. Теорема Гильберта о базисе.

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Теорема о разложении целых чисел в произведение простых сомножителей. Важнейшие арифметические функции.
2. Сравнения, их свойства. Теоремы Эйлера и Ферма.
3. Сравнения с одной неизвестной величиной.
4. Сравнения второй степени. Квадратичный закон взаимности. Первообразные корни и индексы.
5. Сравнение высших степеней.

## ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Разложение булевых функций по переменным. Нормальные формы.
2. Минимизация булевых функций.
3. Замкнутые и полные системы булевых функций.
4. Теорема Поста.
5. Реализация булевых функций релейно-контактными схемами и схемами из функциональных элементов.
  
6. Операции над графами.
7. Группа автоморфизмов графа.
8. Матрицы графов.
9. Деревья.
10. Пути и циклы Эйлера.
11. Укладки графов. Планарность.

## Рекомендуемая литература

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудно решаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. 2-е изд. М.: Наука, 1987.
3. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
4. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. 3-е изд. М.: Наука, 1984.
5. Новиков П.С. Элементы математической логики. 2-е изд. М.: Наука, 1973.
6. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
7. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. 3. Основные структуры алгебры. М.: Физмат лит, 2000.
9. Винберг Э.Б. М. Курс алгебры. М.: Наука, 1983.
10. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
11. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
12. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1964.
13. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М.: Мир, 1964.
14. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
15. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
16. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.
17. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
18. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.
19. Коробков Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.
20. Серр Ж.П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
21. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.
22. Редькин Н.П. Дискретная математика. М.: Физматлит, 2009.
23. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. М.: Академия, 2008.
24. Копылов В.И. Курс дискретной математики. СПб: Лань, 2016.
25. Мальцев И.А. Дискретная математика. СПб: Лань, 2016.

26. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. СПб: Лань, 2016.

27. Шевелев Ю.П., Писаренко Л.А., Шевелев М.Ю. Сборник задач по дискретной математике. СПб: Лань, 2016.

### 2.5. Шкала оценивания ответов на экзамене:

<b>неудовлетворительно</b>	<b>удовлетворительно</b>	<b>хорошо</b>	<b>отлично</b>
до 59 баллов	60 – 75 баллов	76 – 84 баллов	85 – 100 баллов

Общая продолжительность экзамена составляет 45 минут.

Максимальное количество баллов за экзамен – 100. Минимальное количество баллов для успешного прохождения экзамена – 60. Поступающий, набравший менее 60 баллов за экзамен, не может быть зачислен в аспирантуру.

### Таблица критериев оценки устных и письменных ответов (при наличии)

<b>Вид деятельности</b>		
<b>Оценка</b>	<b>Балл</b>	<b>Уровень владения темой</b>
<b>неудовлетворительно</b>	до 59	Неполный, логически противоречивый недоказательный ответ
<b>удовлетворительно</b>	60-75	Ответ является неполным (примерно 30%-40%), изложение логически противоречиво, но понятно
<b>хорошо</b>	76-84	Полный ответ, но имеются некритичные логические несоответствия, при этом форма изложения достаточно ясная и понятная
<b>отлично</b>	85 100	Полный, логически обоснованный ответ, изложенный кратко и ясно

Вступительное испытание проводится экзаменационной комиссией, действующей на основании приказа ректора.

Итоговая оценка за экзамен определяется как средний балл, выставленный всеми членами экзаменационной комиссии.